Représentations continues des groupes compacts : théorème de Peter-Weyl et application aux groupes de Lie

Antonin Assoun

4 Juillet 2024

Le but de cet exposé est de présenter un théorème de structure des représentations continues de groupes compacts sur des espaces hilbertiens, le théorème de Peter-Weyl et de déduire de ce théorème deux corollaires : 1) tout groupe de Lie compact est un sous-groupe fermé de U(n) 2) tout groupe topologique compact est limite projective de groupes de Lie. Bien que les objets centraux soient des groupes, on s'attachera à montrer que les méthodes utilisées pour prouver ce genre de résultats sont essentiellement analytiques.

Dans une première partie on introduira les notions de théorie des groupes nécessaires à l'exposé : groupe topologique, groupe de Lie, mesure de Haar et changements de variable usuels associés, lemme de Schur et théorème de Maschke pour les représentations de groupes finis sur des espaces vectoriels de dimension finie.

Dans un second temps, on rappellera/introduira (avec plus ou moins de détails en fonction des envies de chacun et du temps que cela prendra) la théorie spectrale des opérateurs compact sur les espaces de Hilbert et le calcul fonctionnel continu.

Dans une troisième et dernière partie nous introduirons les représentations continues de groupes topologiques, et grâce aux outils d'analyse fonctionnelle nous prouverons le lemme de Schur pour les représentations de groupes " raisonnables" (manière plus agréable de dire groupe topologique localement compact unimodulaire dénombrable à l'infini) et finirons par la preuve du théorème de Peter-Weyl et des deux corollaires mentionnés ci-dessus. Le niveau de détail des preuves dépendra du temps restant et des envies de chacun (il s'agit essentiellement d'intégrer des fonctions bien choisies avec la mesure de Haar).

Références : Principles of Harmonic analysis, Anton Deitmar et Siegfried Echterhoff (pour moi le meilleur bouquin sur l'analyse harmonique abstraite)

Poly de cours de Gabriel Dospinescu (c'est quand même grâce à son cours de formes modulaires et formes automorphes que j'ai appris ce sujet, je rends à César ce qui est à César ou plutôt à Gabriel ce qui est à Gabriel)